

SAE
Sistema de Apoio ao Ensino
O PASSO À FRENTE



MATEMÁTICA
PRÉ-VESTIBULAR
LIVRO DO PROFESSOR

Esse material é parte integrante do **Aulas Particulares on-line** do **IESDE BRASIL S/A**,
mais informações www.aulasparticularesiesde.com.br

I229 IESDE Brasil S.A. / Pré-vestibular / IESDE Brasil S.A. —
Curitiba : IESDE Brasil S.A., 2009. [Livro do Professor]
660 p.

ISBN: 978-85-387-0571-0

1. Pré-vestibular. 2. Educação. 3. Estudo e Ensino. I. Título.

CDD 370.71

Disciplinas

Língua Portuguesa

Literatura

Matemática

Física

Química

Biologia

História

Geografia

Autores

Francis Madeira da S. Sales
Márcio F. Santiago Calixto
Rita de Fátima Bezerra

Fábio D'Ávila
Danton Pedro dos Santos

Feres Fares
Haroldo Costa Silva Filho
Jayme Andrade Neto
Renato Caldas Madeira
Rodrigo Piracicaba Costa

Cleber Ribeiro
Marco Antonio Noronha
Vitor M. Saquette

Edson Costa P. da Cruz
Fernanda Barbosa

Fernando Pimentel
Hélio Apostolo
Rogério Fernandes

Jefferson dos Santos da Silva
Marcelo Piccinini
Rafael F. de Menezes
Rogério de Sousa Gonçalves
Vanessa Silva

Duarte A. R. Vieira
Enilson F. Venâncio
Felipe Silveira de Souza
Fernando Mousquer

Produção
P A D R ã O



Excelência no Ensino

Projeto e
Desenvolvimento Pedagógico





MATEMÁTICA

Lógica, Conjuntos Numéricos e Relações

Abordagem Teórica

O estudo da Lógica tem aplicação nas mais diversas áreas do conhecimento humano, pois trata das "Leis do Pensamento", título da primeira grande obra sobre lógica de autoria de George Boole, em 1854.

No campo da Matemática, esse estudo está associado ao entendimento do significado de proposições associadas por símbolos lógicos.

A "Teoria dos Conjuntos" é regida por regras similares às da Lógica e tem aplicações em diversas áreas, como análise combinatória e estatística.

Noções de Lógica

Proposição ou sentença

Toda oração declarativa pode ser classificada em verdadeira ou falsa. Toda proposição apresenta um, e somente um, dos valores lógicos: verdadeira (V) ou falsa (F).

Exemplos:

São proposições verdadeiras $9 \neq 5$ e $2 \in \mathbb{Z}$.

São proposições falsas $-1 \in \mathbb{N}$ e $2 > 5$.

Negação

A negação de uma proposição p é indicada por \bar{p} (ou $\sim p$) e tem sempre valor oposto ao de p .

Tabela -verdade:

p	\bar{p}
V	F
F	V

Exemplo:

A negação de $9 = 5$ (F) é $9 \neq 5$ (V).

É importante tomar cuidado ao negar uma proposição. Atente para os casos a seguir:

p : todos os alunos usam óculos.

\bar{p} : existe pelo menos um aluno que não usa óculos.

q : algum aluno usa óculos.

\bar{q} : nenhum aluno usa óculos.

r : $9 > 5$

\bar{r} : $9 \leq 5$

Conectivos

A **conjunção (e)** $p \wedge q$ (ou pq) é verdadeira se p e q forem ambas verdadeiras. Se ao menos uma delas for falsa, então $p \wedge q$ é falsa.

A **disjunção (ou)** $p \vee q$ (ou $p+q$) é verdadeira se ao menos uma das proposições p ou q for verdadeira. Se p e q são ambas falsas, então $p \vee q$ é falsa.

Tabela-verdade:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

▶ **Exemplos:**

- 1) $(9 > 5) \wedge (0 \geq 1)$ é falsa, pois $V \wedge F$ é falso.
- 2) $(9 > 5) \vee (0 \geq 1)$ é verdadeira, pois $V \vee F$ é verdadeiro.

Condicionais

O **condicional** $p \rightarrow q$ é falso somente quando p for verdadeiro e q falso; caso contrário, $p \rightarrow q$ é verdadeiro.

O **bicondicional** $p \leftrightarrow q$ é verdadeiro somente quando p e q forem ambos verdadeiros ou ambos falsos; se isso não acontecer $p \leftrightarrow q$ será falso.

Tabela -verdade:

p	q	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

▶ **Exemplos:**

- 1) $p: 5 > 2$ e $q: 7 \geq 3$, temos $p \rightarrow q$ é verdadeira, pois $V \rightarrow V$ é verdadeira.
- 2) $p: 5 > 2$ e $q: 7 < 3$, temos $p \rightarrow q$ é falsa, pois $V \rightarrow F$ é falsa.
- 3) $p: 5 < 2$ e $q: 7 \geq 3$, temos $p \rightarrow q$ é verdadeira, pois $F \rightarrow V$ é verdadeira.
- 4) $p: 5 < 2$ e $q: 7 < 3$, temos $p \rightarrow q$ é verdadeira, pois $F \rightarrow F$ é verdadeira.
- 5) $p: 5 > 2$ e $q: 7 \geq 3$, temos $p \leftrightarrow q$ é verdadeira, pois $V \leftrightarrow V$ é verdadeira.
- 6) $p: 5 > 2$ e $q: 7 < 3$, temos $p \leftrightarrow q$ é falsa, pois $V \leftrightarrow F$ é falsa.
- 7) $p: 5 < 2$ e $q: 7 \geq 3$, temos $p \leftrightarrow q$ é falsa, pois $F \leftrightarrow V$ é falsa.
- 8) $p: 5 < 2$ e $q: 7 < 3$, temos $p \leftrightarrow q$ é verdadeira, pois $F \leftrightarrow F$ é verdadeira.

Tautologias (proposição logicamente verdadeira)

É a proposição que possui valor V (verdadeira) independente dos valores lógicos das proposições das quais depende.

▶ **Exemplo:**

$$p \rightarrow q \leftrightarrow \bar{q} \rightarrow \bar{p}$$

Proposições logicamente falsas

É a proposição que possui valor F (falsa) independente dos valores lógicos das proposições das quais depende.

▶ **Exemplo:**

$$p \wedge \bar{p}$$

Relação de implicação

Diz-se que p implica q ($p \rightarrow q$) quando na tabela de p e q não ocorre VF em nenhuma linha, isto é, quando o condicional $p \rightarrow q$ for verdadeiro. Nesse caso, pode-se dizer que “p é condição suficiente para q” ou que “q é condição necessária para p”.

Todo **teorema** é uma implicação da forma hipótese \rightarrow tese. Assim, demonstrar um teorema significa mostrar que não ocorre o caso da hipótese ser verdadeira e a tese falsa.

▶ **Exemplo:**

$$x = 2 \rightarrow x^2 = 4.$$

Note que a volta (o contrário) não é necessariamente verdadeira.

Relação de equivalência

Diz-se que p é equivalente a q ($p \leftrightarrow q$) quando p e q têm tabelas-verdades iguais, isto é, quando p e q têm sempre o mesmo valor lógico, ou seja, $p \leftrightarrow q$ é verdadeiro. Nesse caso, diz-se que “p é condição necessária e suficiente para q”.

▶ **Exemplo:**

$$3x + 1 = 4 \leftrightarrow 3x = 4 - 1$$

Na resolução de equações e inequações deve-se atentar para o significado das relações de implicação e equivalência. Passagens relacionadas por equivalência mantêm exatamente o mesmo conjunto-verdade, pois ambas são verdadeiras ou falsas, simultane-

de, pois ambas são verdadeiras ou falsas, simultaneamente. Já passagens relacionadas por implicação não garantem o mesmo conjunto-verdade. Nesse caso, o novo conjunto-verdade contém o anterior, devendo-se ter cuidado com a introdução de raízes que não são válidas. Isso ocorre com frequência na resolução de equações irracionais.

▶ **Exemplo:**

Resolver a equação $\sqrt{x^2 + 5x + 1} + 1 = 2x$

Resolvendo

$$\sqrt{x^2 + 5x + 1} + 1 = 2x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2x - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x + 1 = (2x - 1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 9x = 0$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 3)$$

Testando as raízes obtidas verifica-se que $x = 0$ não é uma raiz válida. Essa raiz apareceu exatamente quando elevou-se ao quadrado ambos os membros da equação, pois, nesse caso, não valia a relação de equivalência, somente a implicação. Como se pode notar, o novo conjunto-solução $S = \{0, 3\}$ continha o conjunto solução da equação inicial $S = \{3\}$.

Quantificadores

Quantificador universal: \forall indica “qualquer que seja”, “para todo”.

▶ **Exemplo:**

$$(\forall x \in R) (x^2 \geq 0)$$

Quantificador existencial: \exists indica “existe”, “existe pelo menos um”, “existe um”. $\exists!$ indica “existe um único”, “existe um e um só”.

▶ **Exemplo:**

$$(\exists x \in N) (x + 1 > 2) \text{ e } (\exists! x \in N) (x + 1 < 2).$$

Negação de proposições

$$\left(\overline{p \wedge q} \right) \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$$

$$\left(\overline{p \vee q} \right) \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$$

$$\left(\overline{p \rightarrow q} \right) \Leftrightarrow p \wedge \overline{q}$$

▶ **Exemplo:**

1) A negação de “Juca é bom e honesto” é “Juca não é bom ou não é honesto”.

2) A negação de “Juca é bom ou honesto” é “Juca não é bom e não é honesto”.

3) A negação de “Se Juca é bom, então é honesto” é “Juca é bom, e não é honesto”.

Demonstração indireta ou redução ao absurdo

Consiste em admitir a negação da conclusão q e depois deduzir logicamente uma contradição qualquer c (uma proposição logicamente falsa como, por exemplo, $p \wedge \overline{p}$). Isso pode ser verificado observando que $(\sim q \rightarrow c) \Leftrightarrow (\sim \sim q \vee c) \Leftrightarrow (q \vee c)$.

▶ **Exemplo:**

Sendo $x, y \in R_+^*$, prove que $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

▶ **Solução:**

Supondo por absurdo a negação da proposição inicial

$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} < 2$, teremos:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} < 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 2xy$$

(“pois $xy > 0$ ”) $\Leftrightarrow (x - y)^2 < 0 \Leftrightarrow$ Contradição

$$\frac{x^2 + y^2}{xy} < 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 2xy$$

SOMENTE se xy for positivo.

Logo, a proposição inicial é válida.

Contraexemplo

Para mostrar que uma proposição da forma $(\forall x \in A) (p(x))$ é falsa (F) basta mostrar que a sua negação $(\exists x \in A) (\sim p(x))$ é verdadeira (V), isto é, que existe pelo menos um elemento $x_0 \in A$, tal que $p(x_0)$ é uma proposição falsa (F). O elemento x_0 diz-se um contraexemplo para a proposição $(\forall x \in A) (p(x))$.

▶ **Exemplo:**

Prove que a proposição $(\forall x \in N) (2^n > n^2)$ é falsa.

▶ **Solução:**

Basta verificar que para $n = 2$ tem-se $(2^2 > 2^2)$ é falsa. Logo, 2 é um contraexemplo para a proposição apresentada que, em consequência, é falsa.

Princípio da indução finita (PIF) Axiomas de Peano

O conjunto N dos números naturais é caracterizado pelos seguintes fatos:





- 1) Existe uma função injetiva $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. A imagem $s(n)$ de cada número natural $n \in \mathbb{N}$ chama-se o sucessor de n .
- 2) Existe um único número natural $1 \in \mathbb{N}$, tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- 3) Se um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$ e $s(X) \subset X$ (isto é, $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$ então $X = \mathbb{N}$.

Interpretação

- 1) Todo número natural tem um sucessor, que ainda é um número natural; números diferentes têm sucessores diferentes.
- 2) Existe um único número natural 1 que não é sucessor de nenhum outro.
- 3) Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e contém também o sucessor de cada um dos seus elementos, então esse conjunto contém todos os números naturais (Princípio da Indução).

Método da indução finita (recorrência)

Se uma propriedade P é válida para o número 1 e se, supondo P válida para o número n , isso resulta que P é válida também para seu sucessor $s(n)$, então P é válida para todos os números naturais.

Aplicação do PIF

- Demonstrar que a afirmação é verdadeira para um caso particular, por exemplo, $n = 1$ (ou o primeiro termo do conjunto).
- Supor que a afirmação é válida para $n = k$.
- Demonstrar, a partir disso, que a afirmação é válida para $n = k + 1$.

Exemplo:

Demonstrar que $1 + 2 + \dots + n = n \cdot (n + 1) : 2$

Solução:

Para $n = 1$, é válido $1 = 1 \cdot (1 + 1) : 2$

Supondo que a propriedade é válida para $n = k$, então

$$1 + 2 + \dots + k = k \cdot (k + 1) : 2$$

Para $n = k + 1$, temos:

$$1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = k \cdot (k + 1) : 2 + (k + 1) = (k + 1) \cdot (k / 2 + 1) = (k + 1) \cdot (k + 2) : 2$$

Como a propriedade é válida também para $n = k + 1$, ela é válida para todo natural C.Q.D.

Teoria dos Conjuntos

Noções primitivas

São noções primitivas, ou seja, sem definição: **conjunto**, **elemento** e **pertinência** entre elemento e conjunto.

Notação

- **Conjunto** \rightarrow geralmente letras maiúsculas.
- **Elemento** \rightarrow geralmente letras minúsculas.
- **Pertinência** $\rightarrow x \in A$: elemento x pertence ao conjunto A ,

$x \notin A$: elemento x não pertence ao conjunto A .

Exemplo:

Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, então $1 \in A$, $2 \in A$ e $4 \notin A$.

Descrição de um conjunto

- 1.º) Citação dos elementos: $A = \{a, e, i, o, u\}$.
- 2.º) Propriedade: $A = \{x \mid x \text{ é vogal}\}$.

Conjunto vazio

É aquele que não possui elementos. Notação: \emptyset .

Exemplo:

$$A = \{x \mid x \text{ é ímpar e múltiplo de } 2\} = \emptyset$$

Conjunto unitário

É aquele que possui somente um elemento.

Exemplo:

$$A = \{1\}; B = \{x \mid x \text{ é um número primo par e positivo}\}; C = \{\{2,3\}\} \text{ e } D = \{\emptyset\}$$

Conjunto universo

Quando os conjuntos em análise são todos subconjuntos de um mesmo conjunto, este recebe o nome de conjunto universo. Notação: U .

Conjuntos iguais

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x) (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

► **Exemplo:**

$$\{a, b, c\} = \{b, c, a\}; \{a, b, c\} \neq \{a, b, c, d\}; \{a, b, c, a, c\} = \{a, b, c\}$$

Subconjuntos

Um conjunto A é subconjunto de um conjunto B se, e somente se, todo elemento de A é também elemento de B.

Notação: $A \subset B$.

$$A \subset B = (\forall x) (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

► **Exemplo:**

$$\{a, b\} \subset \{a, b, c, d\}; \{a, b\} \not\subset \{b, c, d\}$$

Propriedades da inclusão

Para quaisquer conjuntos A, B e C, tem-se:

- 1) $\emptyset \subset A$
- 2) $A \subset A$ reflexiva
- 3) $(A \subset B \text{ e } B \subset A) \Rightarrow A = B$ antissimétrica
- 4) $(A \subset B \text{ e } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$ transitiva

A é **subconjunto próprio** de B quando $A \subset B$ e $A \neq B$.

► **Exemplo:**

$\{1, 2\}$ é subconjunto próprio de $\{1, 2, 3\}$.

O conjunto vazio não tem subconjunto próprio. Qualquer conjunto não-vazio tem vazio como subconjunto próprio.

Conjunto das partes (ou conjunto potência)

É aquele formado por todos os subconjuntos de um certo conjunto.

Notação: o conjunto das partes de A é representado por $\wp(A)$.

► **Exemplo:**

$$A = \{a, b\} \Rightarrow \wp(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

A quantidade de elementos do conjunto das partes de um conjunto A pode ser calculada pela expressão a seguir.

Número de elementos de $\wp(A) = 2^{n(A)}$, onde $n(A)$ é o número de elementos do conjunto A.

Reunião de conjuntos

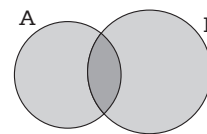
Dados dois conjuntos A e B, a sua reunião é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou a B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

► **Exemplo:**

$$\{a, b\} \cup \{c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}; \{m, n\} \cup \emptyset = \{m, n\}$$

A união de dois conjuntos A e B também pode ser representada por diagramas chamados **Diagramas de Venn**, onde os conjuntos são em forma de linhas fechadas.



Propriedades: sejam A, B e C conjuntos quaisquer, vale:

- 1) $A \cup A = A$ idempotente
- 2) $A \cup \emptyset = A$ elemento neutro
- 3) $A \cup B = B \cup A$ comutativa
- 4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ associativa

O número de elementos da união de 2 e 3 conjuntos pode ser obtido pelas relações a seguir:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Interseção de conjuntos

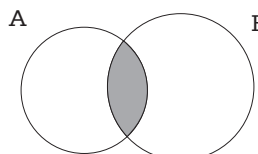
Dados dois conjuntos A e B, a sua interseção é formada pelos elementos que pertencem a A e B, ou seja, pelos elementos comuns aos dois conjuntos.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

► **Exemplo:**

$$\{1, 2\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2\}; \{a, b, c, d\} \cap \{c, d, e\} = \{c, d\}; \{m, n\} \cap \{p, q\} = \emptyset$$

A interseção de A e B é representada em diagramas de Venn pela figura a seguir.



Propriedades: sejam A, B e C conjuntos quaisquer, vale:



- 1) $A \cap \emptyset = \emptyset$
- 2) $A \cap A = A$ idempotente
- 3) $A \cap B = B \cap A$ comutativa
- 4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ associativa

Propriedade distributiva da união e da interseção

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Conjuntos disjuntos

São aqueles que possuem interseção vazia, ou seja, não possuem elementos comuns.

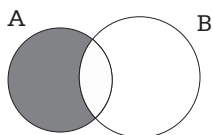
$$A \text{ e } B \text{ são disjuntos} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

Diferença de conjuntos

A diferença entre dois conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

A diferença entre A e B é representada em diagramas de Venn pela figura abaixo.



Exemplo:

$$\{1, 2, 3\} - \{1, 3\} = \{2\}; \{a, b, c\} - \{c, d, e\} = \{a, b\}; \{a, b\} - \{a, b, c, d\} = \emptyset$$

Complementar de B em A

Dados dois conjuntos A e B, tais que $B \subset A$, chama-se complementar de B em relação a A o conjunto $A - B$.

$$B \subset A \Rightarrow C_B^A = A - B$$

Exemplo:

$$1) A = \{a, b, c, d, e\} \text{ e } B = \{c, d, e\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_A^B = \{a, b\};$$

$$2) A = \{a, b, c, d\} \text{ e } B = \{a, b, c, d\}$$

$$\Rightarrow C_A^B = \emptyset$$

$C(A)$, \bar{A} e A' são notações que representam o complementar de A com relação ao universo.

Conjuntos numéricos

O famoso matemático Kronecker supostamente disse: "Deus criou os números naturais; todo o resto é obra do homem." Isso mostra bem que os números naturais, conhecidos há mais tempo, surgiram do cotidiano do ser humano pela necessidade de contar.

Outros conjuntos numéricos foram sendo utilizados para suprir determinadas necessidades. Os racionais (frações), por exemplo, estavam ligados a problemas de razões geométricas. Os irracionais, à polêmica diagonal do quadrado. Os números negativos foram inicialmente interpretados como dívidas e sua existência foi, por muito tempo, contestada, sendo, inclusive, chamados de números absurdos. Os números complexos, necessários à solução de equações, só conseguiram legitimidade após seu desenvolvimento formal.

Como se pode notar, a evolução dos conjuntos numéricos está intimamente ligada ao próprio desenvolvimento da humanidade.

Os conjuntos numéricos são apresentados, a seguir, do mais simples para o mais complexo. Deve-se observar que os conjuntos são ampliações dos anteriores para possibilitar a realização de determinadas operações.

Para uma melhor compreensão é importante entender o significado da propriedade do fechamento: um conjunto é fechado em relação a uma determinada operação se quaisquer que sejam os elementos do conjunto a serem operados, o resultado pertencer ao conjunto. Por exemplo, a soma de dois números naturais é sempre um número natural, logo, os naturais são fechados em relação à adição; já a subtração de dois números naturais nem sempre é natural, assim os naturais não são fechados em relação à subtração.

Conjunto dos números naturais

São os números usados para contar.

$$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Fechamento: adição e multiplicação.

O conjunto dos naturais positivos $N - \{0\}$ é denotado por N^*

$$N^* = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Propriedades da adição e multiplicação:

Associatividade: $(m + n) + p = m + (n + p)$

$$m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$$

Distributividade: $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$

Comutatividade: $m + n = n + m$

$$m \cdot n = n \cdot m$$

Lei do corte: $m + n = m + p \Rightarrow n = p$

$$m \cdot n = m \cdot p \Rightarrow n = p \text{ (com } m \neq 0 \text{)}$$

Tricotomia: dados dois naturais m e n quaisquer, tem-se que ou $a < b$ ou $a = b$ ou $a > b$.

Princípio da boa-ordenação: todo subconjunto não-vazio dos números naturais possui um menor elemento.

Conjunto dos números inteiros

Surgiram a fim de garantir o fechamento em relação à subtração.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Fechamento: adição, subtração e multiplicação.

Suconjuntos notáveis:

Conjunto dos inteiros não-nulos

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots, 3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$$

Conjunto dos inteiros não-negativos

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Conjunto dos inteiros não-positivos

$$\mathbb{Z}_- = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$$

Conjunto dos inteiros positivos

$$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Conjunto dos inteiros negativos

$$\mathbb{Z}_-^* = \{\dots, -3, -2, -1\}$$

O conjunto dos números inteiros possui todas as propriedades dos números naturais e adicionalmente é fechado em relação à subtração.

Pode-se definir o simétrico ou oposto para a adição da seguinte forma: $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists -a \in \mathbb{Z}$ tal que $a + (-a) = 0$.

Com isso é possível definir a subtração em \mathbb{Z} como: $a - b = a + (-b)$

Na subtração acima, **a** chama-se **minuendo**, **b** **subtraendo** e o resultado da operação **resto**.

O minuendo é igual à soma do subtraendo com o resto.

O produto ou divisão de dois inteiros de mesmo sinal é positivo. Para dois inteiros de sinais contrários, o resultado é negativo.

▶ **Exemplo:**

$$(-2) \cdot (-3) = 2 \cdot 3 = 6 \text{ e } (-2) \cdot 3 = 2 \cdot (-3) = -6$$

Divisão de inteiros

Teorema: Se $D, d \in \mathbb{Z}$ e $d > 0$, existem inteiros q e r , univocamente determinados, tais que $D = d \cdot q + r$, onde $0 \leq r < d$.

▶ **Exemplo:**

$$37 = 8 \cdot 4 + 5$$

Na expressão acima D é chamado **dividendo**; d , **divisor**; q **quociente** e r , **resto**. Quando o resto $r = 0$ diz-se que a divisão é exata. Outra expressão útil é a seguinte: $d \cdot q \leq D < d \cdot (q + 1)$.

Valor absoluto ou módulo de um inteiro

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

▶ **Exemplo:**

$$|1| = 1, |-1| = 1 \text{ e } |0| = 0.$$

Propriedades:

$$1) |x| \geq 0$$

$$2) |x| |y| = |xy|$$

$$3) |x|^2 = x^2$$

$$4) |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$5) |x - y| \geq |x| - |y|$$

Conjunto dos números racionais

É o conjunto dos números que podem ser escritos sob forma de fração.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \text{ e } \text{mdc}(a, b) = 1 \right\}$$

▶ **Exemplo:**

$$1) \frac{2}{5}$$

$$2) \frac{-7}{3}$$

$$3) 0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$4) 7 = \frac{7}{1}$$

$$5) 0,666\dots = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Fechamento: adição, subtração, multiplicação e divisão (denominador não-nulo).

Nesse conjunto encontram-se as frações, decimais exatos e as dízimas periódicas.



Observação

Considerando a decomposição em fatores primos do denominador de uma fração irredutível, tem-se:

- apenas fatores 2 e 5 a fração converte-se em um decimal exato;
- apenas fatores diferentes de 2 e 5 a fração converte-se em uma dízima periódica simples;
- fatores 2 ou 5 com outros diferentes deles a fração converte-se em uma dízima periódica composta.

Veja os exemplos abaixo:

$$\frac{3}{20} = \frac{3}{2^2 \cdot 5} = 0,15 \rightarrow \text{decimal exato}$$

$$\frac{1}{33} = \frac{1}{3 \cdot 11} = 0,030303... \rightarrow \text{dízima periódica simples}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2 \cdot 3} = 0,1666... \rightarrow \text{dízima periódica composta}$$

Os números inteiros são também números racionais, pois podem ser considerados frações de denominador 1.

No conjunto dos racionais são adotadas as seguintes definições:

Igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

Adição: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

Multiplicação: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Divisão: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Dízima periódica

Nomenclatura: parte inteira, parte não-periódica e período.

▶ **Exemplo:**

$$1,25434343...$$

parte inteira: 1

parte não-periódica: 25

período: 43

Geratriz de uma dízima periódica é fração ordinária que dá origem à dízima periódica.

A geratriz de uma dízima periódica é uma fração com:

Numerador – parte inteira seguida de parte não-periódica e do período, menos a parte inteira seguida da parte não-periódica.

Denominador – número formado de tantos 9 quantos forem os algarismos do período, seguidos de tantos 0 quantos forem os algarismos da parte não-periódica.

▶ **Exemplo:**

$$0,333... = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$0,242424... = \frac{24}{99} = \frac{8}{33}$$

$$0,133... = \frac{13-1}{90} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$$

$$2,133... = \frac{213-21}{90} = \frac{192}{90} = \frac{32}{15}$$

$$1,23454545... = \frac{12345-123}{9900} = \frac{1222}{9900} = \frac{679}{550}$$

Conjunto dos números reais

O conjunto dos números reais R é a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais (dízimas não-periódicas).

$$R = Q \cup \bar{Q}$$

Os números irracionais são representados por I ou \bar{Q} , são números que não podem ser escritos sob forma de fração e constituem dízimas não-periódicas.

▶ **Exemplo:**

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e \text{ etc.}$$

Não é fechado para a adição, multiplicação e divisão.

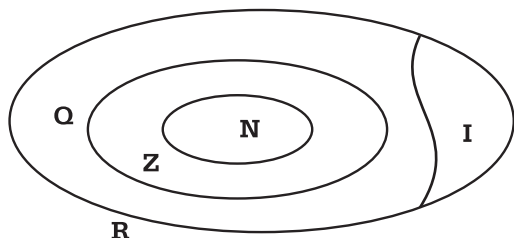


Representação em diagramas

Como pôde ser observado pelas definições dos conjuntos, vale a seguinte relação:

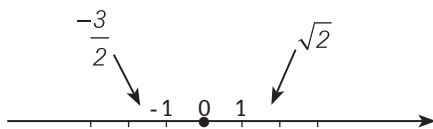
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \text{ e } \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$$

Isso pode ser representado pelo seguinte diagrama.



Reta real

Entre o conjunto dos pontos de uma reta orientada e o conjunto dos números reais existe uma correspondência biunívoca, ou seja, o conjunto \mathbb{R} pode ser representado por uma reta orientada que recebe o nome de reta real.



O **módulo** de um número definido anteriormente pode ser entendido como a **distância** entre o ponto correspondente ao número na reta real e a origem da mesma.

Os conjuntos numéricos podem ser representados pelos seguintes símbolos:

\mathbb{N} = Conjunto dos números naturais.

\mathbb{Z} = Conjunto dos números inteiros.

\mathbb{R} = Conjunto dos números reais.

\mathbb{C} = Conjunto dos números complexos.

Em nossos estudos adotaremos os seguintes símbolos:

N = Conjunto dos números naturais.

Z = Conjunto dos números inteiros.

R = Conjunto dos números reais.

C = Conjunto dos números complexos.

Intervalos

Dados dois números reais $a < b$, define-se:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ → intervalo fechado em a e b .

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ → intervalo fechado em a e aberto em b .

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ → intervalo aberto em a e fechado em b .

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ → intervalo aberto em a e b .

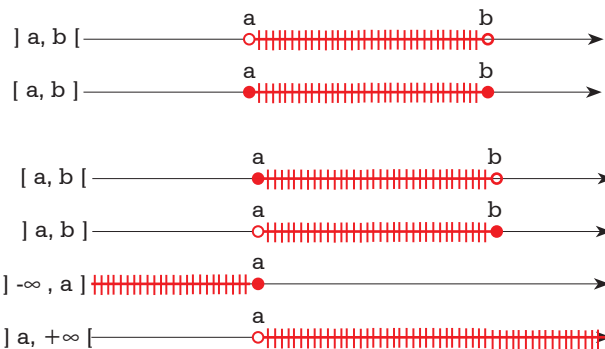
$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

Os intervalos reais podem ser representados sobre a reta real como segue:



É comum usar também parêntese no lugar do colchete para fora para representar uma extremidade aberta de intervalo. Assim, $]2, 3[= (2, 3)$. Deve-se tomar cuidado, porém, para que essa notação não cause confusão com a notação para par ordenado.

As extremidades infinitas de intervalos são sempre representadas abertas como, por exemplo $[2, +3[$.

Na representação gráfica de intervalos sobre a reta real, extremidades fechadas são sempre representadas por bolas cheias e extremidades abertas por bolas não-preenchidas. Assim, o intervalo $[2, 3[$ pode ser representado como segue:

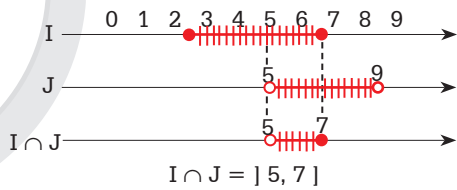


As operações entre intervalos são as mesmas vistas no estudo dos conjuntos e podem ser mais facilmente efetuadas com o auxílio de representações gráficas.

Exemplo:

Sejam os intervalos $I = [2, 7]$ e $J =]5, 9[$, determine $I \cap J$.

Resolvendo:



Par ordenado

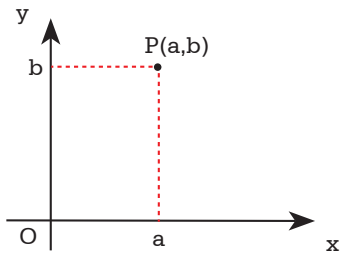
É um conceito primitivo representado por (a, b) , sendo um conjunto de dois elementos ordenados.

Igualdade

Dois pares ordenados são iguais se, e somente se, as suas duas coordenadas são iguais.

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

Os pares ordenados podem ser representados no **sistema cartesiano ortogonal**, onde o primeiro elemento do par ordenado é representado no eixo horizontal Ox (eixo das abscissas) e o segundo elemento do par ordenado é representado no eixo horizontal Oy (eixo das ordenadas). Isso pode ser observado na figura a seguir:



Produto cartesiano

O produto cartesiano de dois conjuntos A e B é o conjunto de todos os pares ordenados que têm o primeiro termo em A e o segundo termo em B.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

Se um dos conjuntos for vazio, o produto cartesiano é vazio.

$$\emptyset \times B = \emptyset, A \times \emptyset = \emptyset \text{ e } \emptyset \times \emptyset = \emptyset$$

O produto cartesiano não é comutativo, assim $A \times B \neq B \times A$, quando $A \neq B$.

O número de elementos do produto cartesiano pode ser obtido multiplicando a quantidade de elementos de cada um dos conjuntos.

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

Exemplo:

$$A = \{0, 2\} \text{ e } B = \{1, 3, 5\}$$

$$A \times B = \{(0, 1); (0, 3); (0, 5); (2, 1); (2, 3); (2, 5)\}$$

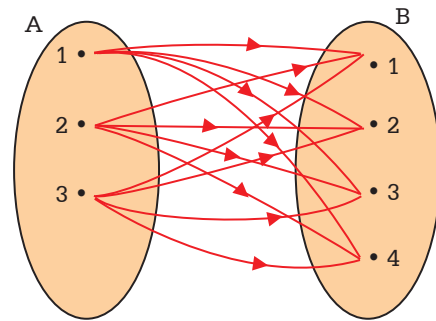
$$B \times A = \{(1, 0); (1, 2); (3, 0); (3, 2); (5, 0); (5, 2)\}$$

$$n(A \times B) = n(B \cdot A) = 2 \cdot 3 = 6$$

O produto cartesiano $A \cdot A$ é denotado por A^2 . A diagonal de A^2 é $\Delta A = \{(x,y) \in A^2 \mid x = y\}$.

É possível representar o produto cartesiano graficamente por meio de um diagrama de flechas.

Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cdot B = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4)\}$ terá a representação abaixo.

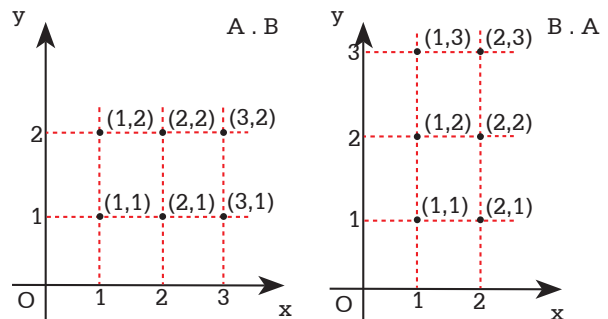


O produto cartesiano pode ser representado graficamente no plano cartesiano ortogonal, através da representação dos pares ordenados que o compõe.

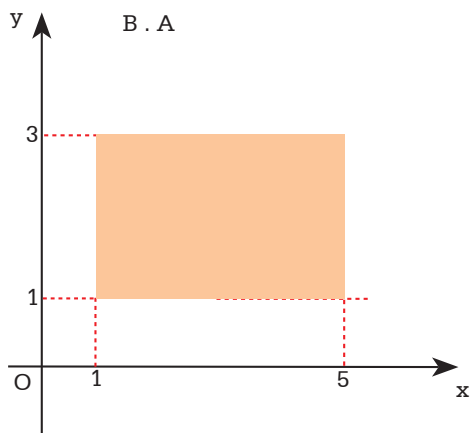
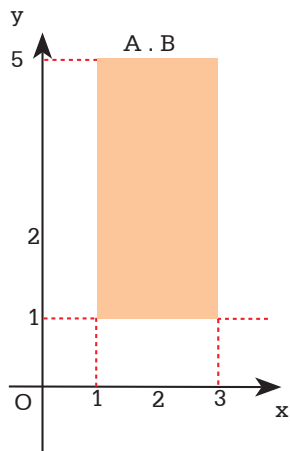
A representação gráfica é útil também para apresentar o resultado do produto cartesiano entre intervalos reais.

Exemplo:

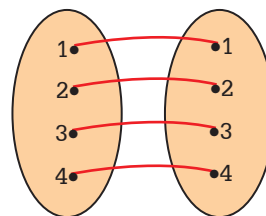
$$A = \{1, 2, 3\} \text{ e } B = \{1, 2\}$$



$$A = [1, 3] \text{ e } B = [1, 5]$$



$D(R) \subset A$ e $Im(R) \subset B$



$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ e } B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid x = y\}$$

Relação inversa

É a relação obtida a partir dos pares ordenados de R, invertendo-se a ordem dos termos de cada par.

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$$

► **Notas:**

- 1) $D(R^{-1}) = Im(R)$
- 2) $Im(R^{-1}) = D(R)$
- 3) $(R^{-1})^{-1} = R$

Exercícios Resolvidos

1. Três amigas foram para uma festa com vestidos azul, preto e branco, respectivamente. Seus pares de sapato apresentavam essas mesmas três cores, mas somente Ana usava vestido e sapatos de mesma cor. Nem o vestido nem os sapatos de Júlia eram brancos. Marisa usava sapatos azuis. Descreva a cor do vestido de cada uma das moças.



► **Solução:**

Vamos montar um quadro representando as condições apresentadas no problema:

	Ana	Júlia	Marisa
Vestido	cor X	não branco 2	não azul
Sapato	cor X	não branco 1	azul

Propriedades

- 1) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- 2) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- 3) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

Relação

Uma relação de A em B é qualquer subconjunto de $A \times B$.

► **Nota:**

Quando R é uma relação de A em A, diz-se apenas que R é uma relação em A.

Numa relação de A em B, A é chamado **conjunto de partida** e B, **conjunto de chegada**. O conjunto de todas as primeiras coordenadas que pertencem a R é chamado **domínio** e o conjunto de todas as segundas coordenadas que pertencem a R é chamado **imagem**, ou seja, o **domínio** e a **imagem** são formados por elementos que efetivamente estão em algum par ordenado da relação.



Como os sapatos de Marisa eram azuis e os de Júlia não eram brancos, conclui-se que os sapatos de Júlia eram pretos.

Como os sapatos de Júlia eram pretos e o vestido de cor diferente e não-branco, então o vestido de Júlia era azul.

Considerando que os sapatos de Marisa eram azuis e os de Júlia pretos, conclui-se que os sapatos de Ana eram brancos e também o vestido.

Finalmente, como o vestido de Ana era branco e o de Júlia era azul, então o vestido de Marisa era preto.

Resposta: Ana estava de vestido branco, Júlia de vestido azul e Marisa de vestido preto.

2. Sendo $A = \{\emptyset, a, \{b\}\}$, com $\{b\} \neq a \neq b \neq \emptyset$, então:

- a) $\{\emptyset, \{b\}\} \subset A$
- b) $\{\emptyset, b\} \subset A$
- c) $\{\emptyset, \{a\}\} \subset A$
- d) $\{a, b\} \subset A$
- e) $\{\{a\}, \{b\}\} \subset A$

Solução: A

Devemos identificar os elementos de A que são: \emptyset , a e $\{b\}$.

Um subconjunto de A deve possuir somente elementos que sejam de A. Logo, $\{\emptyset, \{b\}\} \subset A$.

3. Numa comunidade são consumidos 3 produtos A, B e C. Feita uma pesquisa de mercado sobre o consumo desses produtos, foram colhidos os resultados da tabela abaixo:

Produtos	n.º de consumidores
A	100
B	150
C	200
A e B	20
B e C	40
A e C	30
A, B e C	10
nenhum dos 3	130

Pergunta-se:

- a) quantas pessoas foram consultadas?
- b) quantas pessoas não consomem o produto B?

- c) quantas pessoas consomem só 2 produtos?
- d) quantas pessoas não consomem A ou não consomem C?

Solução:

Deve-se começar colocando-se no diagrama de Venn o valor correspondente à interseção dos 3 conjuntos.

$n(A \cap B \cap C) = 10$

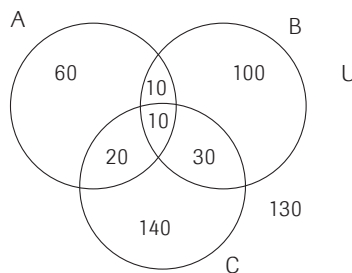
Posteriormente, colocam-se os valores correspondentes às interseções 2 a 2, atentando para a necessidade de se subtrair o valor da interseção dos 3.

Finalmente, colocam-se as quantidades de elementos que pertencem a somente um dos conjuntos, subtraindo os valores colocados anteriormente.

Tendo feito as operações acima, obtém-se o diagrama:

Basta agora procurar no diagrama os valores adequados:

- a) soma de todos os valores do diagrama $\rightarrow n(U) = 500$
- b) soma de todos os valores que não estão em B $\rightarrow n(U) - n(B) = 350$
- c) $10 + 20 + 30 = 60$
- d) $n(U) - n(A \cup C) = 130 + 100 = 230$



4. Projetar um circuito elétrico para um quarto com uma lâmpada elétrica e dois interruptores, um junto à porta e outro próximo à cabeceira da cama. Quando qualquer um dos interruptores for acionado, o circuito deve tornar-se aberto (desligado) se estiver previamente fechado (ligado) e vice-versa, independentemente do estado do outro interruptor.

Solução:

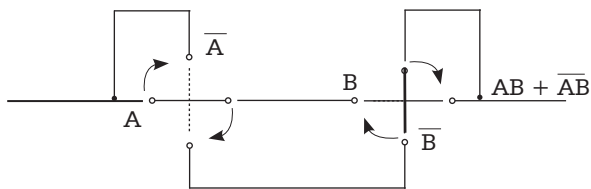
Chamemos os interruptores do circuito de A e B.

O problema se reduz a projetar uma combinação C de interruptores A e B, tal que a mudança de estado de qualquer um dos dois interruptores mude o estado do circuito C.

Vamos considerar que a proposição c é o estado do circuito C e as proposições a e b, os estados dos interruptores A e B.

A condição apresentada é satisfeita quando c é uma proposição que é verdadeira se a e b são simultaneamente verdadeiras ou simultaneamente falsas, e que é falsa em todos os outros casos. Assim, $c = a - b + \bar{a} - \bar{b}$

A construção desse circuito está representada na figura abaixo:



5. Calcule o valor numérico da expressão:

$$\left(\frac{0,625 - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} - 4} \right) : \frac{0,777...}{8} \text{ é}$$

- a) -9
- b) -6
- c) $-\frac{9}{10}$
- d) $-\frac{9}{37}$
- e) $-\frac{9}{45}$

▶ **Solução:** C

$$0,625 = \frac{625}{1000} = \frac{5}{8}$$

$$0,777... = \frac{7}{9}$$

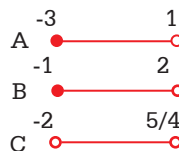
$$\left(\frac{\frac{5}{8} - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} - 4} \right) : \frac{7}{8} = \frac{\frac{15-8}{24}}{\frac{2-12}{12}} : \frac{7}{8} =$$

$$\frac{7}{24} \cdot \frac{3}{(-10)} \cdot \frac{72}{7} = -\frac{9}{10}$$

6. Sejam $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 1\}$, $B = [-1, 2[$ e $C =]-2, 5/4[$, determine:

- a) $A \cap B \cap C$
- b) $(A - B) \cup C$
- c) $(A \cap B) - C$
- d) $B \cap C$

▶ **Solução:**



Basta fazer a representação gráfica dos intervalos e efetuar as operações indicadas.

- a) $A \cap B \cap C = [-1, 1[$
- b) $(A - B) \cup C = [-3, -1[\cup C = [-3, 5/4[$
- c) $(A \cap B) - C = [-1, 1[- C = \emptyset$
- d) $B \cap C = [-1, 5/4[$

7. Um conjunto A possui 2 elementos e um conjunto B possui 3 elementos. Quantas são as relações de A em B?

▶ **Solução:**

Quantidade de elementos do produto cartesiano

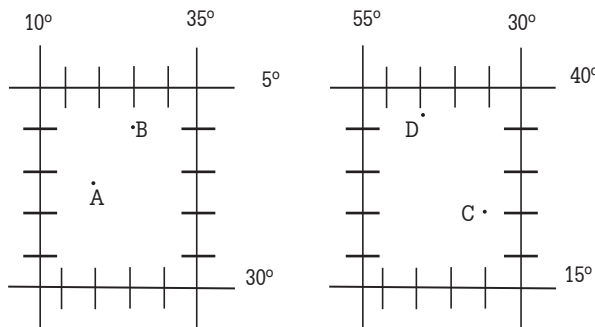
$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 2 \cdot 3 = 6$$

Qualquer subconjunto de $A \times B$ é uma relação de A em B. Assim, a quantidade de relações de A em B é igual à quantidade de subconjuntos de um conjunto de 6 elementos, ou seja, $2^6 = 64$.

Logo, há 64 relações de A em B.

8. (UFCE) Considere os gráficos abaixo e assinale a afirmativa verdadeira:

- a) O ponto A tem como coordenadas geográficas 15° lat. norte e 20° long. oeste de Greenwich.
- b) O ponto B está situado no hemisfério meridional e na zona intertropical do globo.
- c) O ponto C está situado a oeste do ponto D.
- d) Não existe diferença horária entre os pontos B e D.



▶ **Solução:**

A localização de pontos na superfície terrestre através de latitude e longitude guarda muitas similaridades com a representação de pares ordenados no plano cartesiano.

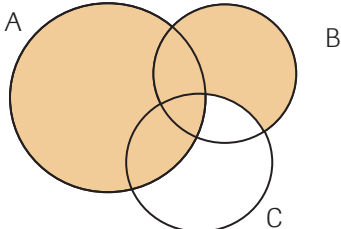


Analisando a localização do ponto B podemos observar que a latitude está crescendo para baixo o que indica que o ponto está no hemisfério meridional (sul) e o valor de sua latitude é de 10° S. Como o Trópico de Capricórnio está a 23° lat. sul, o ponto B encontra-se na zona intertropical (isto é, entre os trópicos).

Exercícios Grupo 1



- A negação da proposição: "Todos os gatos são negros" é:
 - nenhum gato é negro.
 - alguns gatos não são negros.
 - nenhum gato é branco.
 - todos os gatos são brancos.
- (UFF) Na cidade litorânea de loretin é rigorosamente obedecida a seguinte ordem do prefeito: "Se não chover, então, todos os bares à beira-mar deverão ser abertos." Pode-se afirmar que:
 - se todos os bares à beira-mar estão abertos, então, choveu.
 - se todos os bares à beira-mar estão abertos, então, não choveu.
 - se choveu, então, todos os bares à beira-mar não estão abertos.
 - se choveu, então, todos os bares à beira-mar estão abertos.
 - se um bar à beira-mar não está aberto, então, choveu.
- (PUC-RJ) Sejam x e y números tais que os conjuntos {1, 4, 5} e {x, y, 1} sejam iguais. Então, podemos afirmar que:
 - $x = 4$ e $y = 5$
 - $x \neq 4$
 - $y \neq 4$
 - $x + y = 9$
 - $x < y$
- (UFF) Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 16\}$, determine $A \cap B$.
- (UFF) São subconjuntos do conjunto $A = \{\{1\}, 2, \{1, 2\}, \emptyset\}$ os seguintes conjuntos:
 - $\{\{2\}\}, \{1, 2\}$
 - $A, \emptyset, \{\{2\}\}$
 - $A, \emptyset, \{1, 2\}$
 - $A, \emptyset, \{1\}, \{2\}$
 - $A, \emptyset, \{2\}, \{\{1\}, 2\}$

- (UNIRIO) Considerando os conjuntos A, B e C, a região hachurada no diagrama abaixo representa:
 
 - $A \cup (C - B)$
 - $A \cap (C - B)$
 - $A \cap (B - C)$
 - $(A \cup B) - C$
 - $A \cup (B - C)$

- (UFF) Considere os conjuntos representados abaixo:
 

Represente, enumerando seus elementos, os conjuntos:

- P, Q e R
 - $(P \cap Q) - R$
 - $(P \cup Q) \cap R$
 - $(Q \cup R) - P$
 - $(Q \cap R) \cup P$
- (UFF) Dados três conjuntos M, N e P não-vazios tais que $M - N = P$, considere as afirmativas:
 - $P \cap N = \emptyset$
 - $M \cap P = P$
 - $P \cup (M \cap N) = M$
 Com relação a essas afirmativas conclui-se que:
 - todas são verdadeiras.
 - somente a II e a III são verdadeiras.
 - somente a I e a II são verdadeiras.
 - somente a I e a III são verdadeiras.
 - nenhuma é verdadeira.
 - Entre 500 rapazes que estudam em uma escola, constatou-se que:
 - 160 jogam futebol;
 - 170 jogam vôlei;
 - 180 jogam basquete;

4. 50 jogam futebol e vôlei;
5. 80 jogam basquete e vôlei;
6. 60 jogam futebol e basquete;
7. 30 jogam futebol, basquete e vôlei.

Pergunta-se

- a) Quantos não jogam vôlei?
- b) Quantos só jogam basquete?
- c) Quantos praticam exatamente dois esportes?
- d) Quantos só praticam um dos esportes?
- e) Quantos jogam, somente, futebol e vôlei?

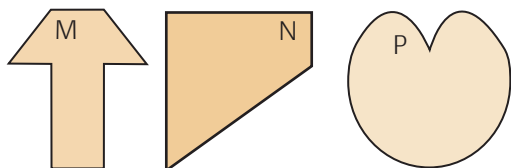
10. (UFF) Dado o conjunto $P = \{\{0\}, 0, \emptyset, \{\emptyset\}\}$, considere as afirmativas:

- I. $\{0\} \in P$
- II. $\{0\} \subset P$
- III. $\emptyset \in P$

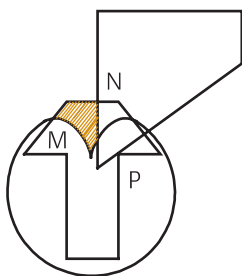
Com relação a essas afirmativas conclui-se que:

- a) todas são verdadeiras.
- b) apenas a I é verdadeira.
- c) apenas a II é verdadeira.
- d) apenas a III é verdadeira.
- e) todas são falsas.

11. (UFF) Os conjuntos não-vazios M, N e P estão, isoladamente, representados abaixo.



Considere a seguinte figura que esses conjuntos formam.

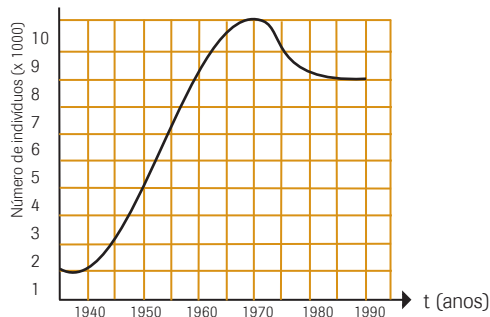


A região hachurada pode ser representada por:

- a) $M \cup (N \cap P)$
- b) $M - (N \cup P)$
- c) $M \cup (N - P)$

- d) $N - (M \cup P)$
- e) $N \cup (P \cap M)$

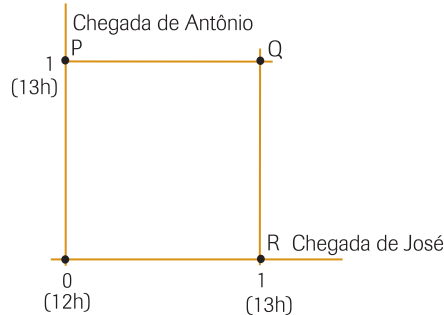
12. (ENEM) O número de indivíduos de certa população é representado pelo gráfico abaixo.



Em 1975, a população tinha um tamanho, aproximadamente, igual ao de:

- a) 1960
- b) 1963
- c) 1967
- d) 1970
- e) 1980

13. (ENEM) José e Antônio viajarão em seus carros com as respectivas famílias para a cidade de Serra Branca. Com a intenção de seguir viagem juntos, combinam um encontro no marco inicial da rodovia, onde chegarão, de modo independente, entre meio-dia e 1 hora da tarde. Entretanto, como não querem ficar muito tempo esperando um pelo outro, combinam que o primeiro que chegar ao marco inicial esperará pelo outro, no máximo, meia hora; após esse tempo, seguirá viagem sozinho. Chamando de x o horário de chegada de José e de y o horário de chegada de Antônio, e representando os pares $(x; y)$ em um sistema de eixos cartesianos, a região OPQR ao lado indicada corresponde ao conjunto de todas as possibilidades para o par $(x; y)$:

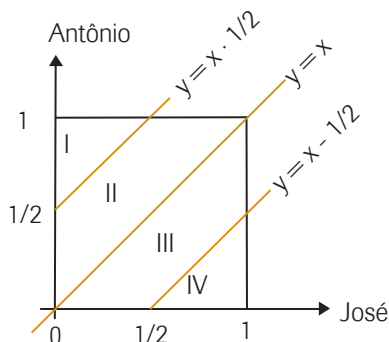


Na região indicada, o conjunto de pontos que representa o evento "José e Antônio chegam ao marco inicial exatamente no mesmo horário" corresponde:



- a) à diagonal OQ.
- b) à diagonal PR.
- c) ao lado PQ.
- d) ao lado QR.
- e) ao lado OR.

14. Segundo o combinado, para que José e Antônio viajem juntos, é necessário que $y - x \leq 1/2$ ou que $x - y \leq 1/2$.



De acordo com o gráfico e nas condições combinadas, as chances de José e Antônio viajarem juntos são de:

- a) 0%.
- b) 25%.
- c) 50%.
- d) 75%.
- e) 100%.

15. (ENEM) Considerando que o Calendário Muçulmano teve início em 622 da era cristã e que cada 33 anos muçulmanos correspondem a 32 anos cristãos, é possível estabelecer uma correspondência aproximada de anos entre os dois calendários, dada por:

(C = Anos Cristãos e M = Anos Muçulmanos)

- a) $C = M + 622 - (M : 33)$.
- b) $C = M - 622 + (C - 622 : 32)$.
- c) $C = M - 622 - (M/33)$.
- d) $C = M - 622 + (C - 622 : 33)$.
- e) $C = M + 622 - (M : 32)$.

16. (ENEM 2004) Em quase todo o Brasil existem restaurantes em que o cliente, após se servir, pesa o prato de comida e paga o valor correspondente, registrado na nota pela balança. Em um restaurante desse tipo, o preço do quilo era R\$12,80. Certa vez, a funcionária digitou por engano na balança eletrônica o valor de R\$18,20 e só percebeu o erro algum tempo depois, quando vários clientes já estavam almoçando. Ela fez alguns cálculos e verificou que o erro seria corrigido se o valor incorreto indicado na nota dos clientes fosse multiplicado por:

- a) 0,54
- b) 0,65
- c) 0,70
- d) 1,28
- e) 1,42

17. (UERJ) Para calcular $\frac{3}{2} - \frac{12}{5}$, Paulo subtraiu os numeradores e dividiu o resultado por 10 obtendo:

$$\frac{3}{2} - \frac{12}{5} = \frac{3-12}{10} = -0,9$$

a) Determine de forma correta o valor da expressão

$$\frac{3}{2} - \frac{12}{5}$$

b) Considerando que Paulo tenha calculado com base na fórmula $\frac{x}{2} - \frac{y}{5} = \frac{x-y}{10}$, onde x e y são reais, identifique o lugar geométrico dos pontos (x, y) do plano cartesiano que tornam essa igualdade verdadeira. Esboce, também, o gráfico cartesiano.

18. (CESGRANRIO) A interseção dos três conjuntos $R \cap C$, $(N \cap Z) \cup Q$ e $N \cup (Z \cap Q)$ é:

- a) N
- b) \emptyset
- c) Q
- d) R
- e) Z

19. (UERJ) Um restaurante *self-service* cobra pela refeição R\$6,00, por pessoa, mais uma multa pela comida deixada no prato, de acordo com a tabela:

Intervalo do desperdício (em gramas)	Multa (em reais)
[0,100[0
[100, 200[1
[200, 300[2
[300, 400[3

- a) Se Julia pagou R\$9,00 por uma refeição, indique a quantidade mínima de comida que ela pode ter desperdiçado.
- b) Y é o valor total pago em reais, por pessoa, e X ∈ ℝ é a quantidade desperdiçada, em gramas. Esboce o gráfico de Y em função de X.

20. (PUC-RJ) A soma $1,3333... + 0,16666...$ é igual a:

- a) $1/2$
- b) $5/2$
- c) $4/3$
- d) $5/3$
- e) $3/2$

21. (PUC-RJ) Dividir um número por 0,0125 equivale a multiplicá-lo por:

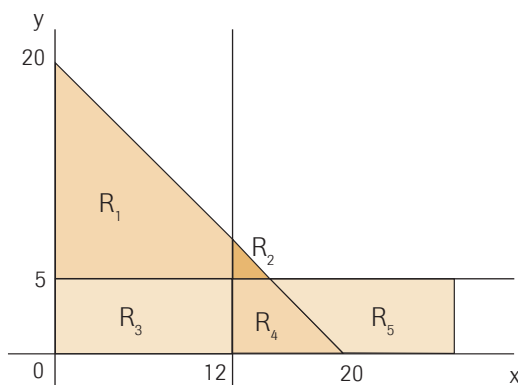
- a) $\frac{1}{125}$
- b) $\frac{1}{8}$
- c) 8
- d) 12,5
- e) 80

22. (UFF) O número $\pi - 2$ pertence ao intervalo:

- a) $[1, 3/2]$
- b) $(1/2, 1]$
- c) $[3/2, 2]$
- d) $(-1, 1)$
- e) $[-3/2, 0]$

23. (UFF 2001) O elenco de um filme publicitário é composto por pessoas com cabelos louros ou olhos verdes. Sabe-se que esse elenco tem, no máximo, vinte pessoas dentre as quais, pelo menos, doze possuem cabelos louros e, no máximo, cinco possuem olhos verdes.

No gráfico a seguir, pretende-se marcar um ponto $P(L,V)$, em que L representa o número de pessoas do elenco que têm cabelos louros e V o número de pessoas do elenco que têm olhos verdes.



O ponto P deverá ser marcado na região indicada por:

- a) R_1
- b) R_2

- c) R_3
- d) R_4
- e) R_5

Exercícios Grupo 2

1. Considere as seguintes premissas.

1. Quem sabe caçar borboletas não é engraçado.
2. Coelho não sabem andar de bicicleta.
3. Quem não sabe andar de bicicleta é engraçado.

Dentre as sentenças a seguir, diga qual pode ser a conclusão das premissas:

- a) Quem não sabe andar de bicicleta é coelho.
- b) Quem sabe andar de bicicleta não é engraçado.
- c) Quem não sabe caçar borboleta é engraçado.
- d) Coelho não sabem caçar borboletas.
- e) As pessoas engraçadas não sabem andar de bicicleta.

2. (UFF) As três filhas de Seu Anselmo – Ana, Regina e Helô – vão para o colégio usando, cada uma, seu meio de transporte preferido: bicicleta, ônibus ou moto. Uma delas estuda no Colégio Santo Antônio, outra no São João e outra no São Pedro. Seu Anselmo está confuso em relação ao meio de transporte usado e ao colégio em que cada filha estuda. Lembra-se, entretanto, de alguns detalhes:

- Helô é a filha que anda de bicicleta;
- a filha que anda de ônibus não estuda no Colégio Santo Antônio;
- Ana não estuda no Colégio São João e Regina estuda no Colégio São Pedro.

Pretendendo ajudar Seu Anselmo, sua mulher junta essas informações e afirma:

- I. Regina vai de ônibus para o Colégio São Pedro.
- II. Ana vai de moto.
- III. Helô estuda no Colégio Santo Antônio.

Com relação a estas afirmativas, conclui-se:

- a) apenas a I é verdadeira.
- b) apenas a I e a II são verdadeiras.
- c) apenas a II é verdadeira.
- d) apenas a III é verdadeira.
- e) todas são verdadeiras.



3. (UNIFICADO) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 3\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, então o conjunto que representa $(A \cap B) - C$ é:

- $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

4. Um conjunto A tem **n** elementos e **p** subconjuntos e um conjunto B tem 3 elementos a mais do que o conjunto A. Se **q** é o número de subconjuntos de B, então:

- $q = 3p$
- $p = 8q$
- $p = q + 8$
- $p/q = 1/8$
- $q = p + 8$

5. (UFF) Com relação aos conjuntos

$P = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq \sqrt{7}\}$ e $Q = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 0,333\dots\}$ afirma-se:

- $P \cup Q = P$
- $Q - P = \{0\}$
- $P \subset Q$
- $P \cap Q = Q$

Somente são verdadeiras as afirmativas:

- I e III.
- I e IV.
- II e III.
- II e IV.
- III e IV.

6. (UNIRIO) Considere três conjuntos A, B e C, tais que: $n(A) = 28$, $n(B) = 21$, $n(C) = 20$, $n(A \cap B) = 8$, $n(B \cap C) = 9$, $n(A \cap C) = 4$ e $n(A \cap B \cap C) = 3$. Assim sendo, o valor de $n((A \cup B) \cap C)$ é:

- 3
- 10
- 20
- 21
- 24

7. (UFRJ) Um clube oferece a seus associados aulas de três modalidades de esporte: nataação, tênis e futebol. Nenhum associado pode se inscrever simultaneamente em tênis e futebol, pois, por problemas administrativos, as aulas desses

dois esportes serão dadas no mesmo horário. Encerradas as inscrições, verificou-se que: dos 85 inscritos em nataação, 50 só farão nataação; o total de inscritos para as aulas de tênis foi de 17 e, para futebol, de 38; o número de inscritos só para as aulas de futebol excede em 10 o número de inscritos só para as de tênis.

Quantos associados se inscreveram simultaneamente para aulas de futebol e nataação?

8. (UFRJ) Uma amostra de 100 caixas de pílulas anticoncepcionais, fabricadas pela Nascebem S.A., foi enviada para a fiscalização sanitária.

No teste de qualidade, 60 foram aprovadas e 40 reprovadas, por conterem pílulas de farinha. No teste de quantidade 74 foram aprovadas e 26 reprovadas por conterem um número de pílulas menor do que o especificado.

O resultado dos dois testes mostrou que 14 caixas foram reprovadas em ambos os testes.

Quantas caixas foram aprovadas em ambos os testes?

9. (UNB) Uma pesquisa com 1 000 pessoas revelou que 70% delas têm aparelho de som, 85% têm telefone, 47,2% têm computador e 98,7% têm televisor. Nessa situação, considere que S, F, C e T representam, respectivamente, os conjuntos das pessoas que possuem aparelho de som, telefone, computador e televisor. Considerando ainda que $|x|$ representa o número de pessoas do conjunto X e que X^c representa o conjunto complementar de X, julgue os itens que seguem.

- $|S \cap F \cap C \cap T| \leq 472$
- $|C| + |T^c| = 488$
- $|S^c \cup F^c| \leq 450$
- $|S \cap F \cap C \cap T| \geq 9$.



Conexões

10. (UFF) O seguinte enunciado é verdadeiro:

“Se uma mulher está grávida, então a substância gonadotrofina coriônica está presente na sua urina.”

Duas amigas, Fátima e Mariana, fizeram exames e constatou-se que a substância gonadotrofina coriônica está presente na urina de Fátima e não está presente na urina de Mariana.

Utilizando a proposição enunciada, os resultados dos exames e o raciocínio lógico-dedutivo:

- garante-se que Fátima está grávida e não se pode garantir que Mariana está grávida.

- b) garante-se que Mariana não está grávida e não se pode garantir que Fátima está grávida.
- c) garante-se que Mariana está grávida e que Fátima também está grávida.
- d) garante-se que Fátima não está grávida e não se pode garantir que Mariana está grávida.
- e) garante-se que Mariana não está grávida e que Fátima está grávida.

11. (UNB) Em uma pesquisa realizada com um grupo de 100 turistas, constatou-se que 42 falam inglês, 12 falam inglês e italiano, 18 falam espanhol e inglês e 16 falam espanhol e italiano. O número de turistas que falam espanhol é, precisamente, 50% maior que o número daqueles que falam italiano. Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.

- () O número de turistas que falam italiano é igual a $\frac{2}{3}$ do número dos que falam espanhol.
- () Se nove dos turistas consultados falam as três línguas, espanhol, inglês e italiano, enquanto cinco deles não falam nenhuma dessas línguas, então, mais da metade dos turistas falam espanhol.
- () Se nove dos turistas consultados falam as três línguas, espanhol, inglês e italiano, enquanto cinco deles não falam nenhuma dessas línguas, então, exatamente 24 desses turistas falam apenas inglês.
- () Se todos os turistas falam pelo menos uma das três línguas, então, escolhendo-se aleatoriamente um dos turistas, a chance de ele falar italiano será maior que 30%.

12. (UFF) Calcule o valor da expressão:

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{(1+1)^2}\right)^2}\right)^2}$$

13. (UFF) Dos 135 funcionários de uma empresa localizada em Niterói, $\frac{2}{3}$ moram na cidade do Rio de Janeiro. Dos funcionários que moram na cidade do Rio de Janeiro, $\frac{3}{5}$ usam ônibus até a estação das barcas e, em seguida, pegam uma barca para chegar ao trabalho. Sabe-se que 24 funcionários da empresa usam exclusivamente seus próprios automóveis para chegar ao trabalho, sendo que $\frac{1}{3}$ destes não mora na cidade do Rio de Janeiro. Os demais funcionários da empresa usam somente ônibus para chegar ao trabalho.

Determine:

- a) o número de funcionários que usam somente ônibus para chegar ao trabalho;
- b) o número de funcionários da empresa que usam somente ônibus para chegar ao trabalho e que não moram na cidade do Rio de Janeiro.

14. (UFF) Considere o conjunto X dos números racionais da forma $\frac{p}{3}$, com $p \in \mathbb{Z}_+^*$, tais que p e 3 são primos entre si. A soma dos elementos de X, que são maiores que cinco e menores que 12, é:

- a) 17
- b) 51
- c) 119
- d) 170
- e) 510

15. (UNIRIO) Um grupo de amigos vai acampar num final de semana. Sabendo-se que numa certa hora da manhã de domingo, o equivalente a um terço desse grupo está envolvido com o preparo do almoço, o equivalente à metade do grupo cuida da limpeza do acampamento, o equivalente à décima parte desses dois subgrupos colhe flores nas redondezas e um elemento do grupo deleita-se com um livro de crônicas de Zuenir Ventura, quantos elementos tem esse grupo de amigos?

- a) 18
- b) 24
- c) 12
- d) 6
- e) 30

16. (UNICAMP) Sabe-se que o número natural D, quando dividido por 31, deixa resto $r \in \mathbb{N}$ e que o mesmo número D, quando dividido por 17, deixa resto $2r$.

- a) Qual é o maior valor possível para o número natural r ?
- b) Se o primeiro quociente for igual a 4 e o segundo quociente for igual a 7, calcule o valor numérico de D.

17. (FUVEST-SP) Uma senhora tinha entre trinta e quarenta ações de uma empresa para dividir igualmente entre todos os seus netos. Num ano, quando tinha 3 netos, se a partilha fosse feita, deixaria 1 ação sobrando. No ano seguinte, nasceu mais um neto e, ao dividir igualmente entre os quatro netos o mesmo número de ações, ela observou que sobriam 3 ações. Nessa última situação, quantas ações receberá cada neto?

- a) 6
- b) 7
- c) 8

GABARITO

Exercícios Grupo 1



1. B

2. E

3. D

4. $A \cap B = [-4, -2[\cup]2, 4]$

5. E

6. E

7.

a) $P = \{3, 4, 5, 7\}$; $Q = \{1, 2, 3, 7\}$ e $R = \{2, 5, 6, 7\}$

b) $(P \cap Q) - R = \{3\}$

c) $(P \cup Q) \cap R = \{2, 5, 7\}$

d) $(Q \cup R) - P = \{1, 2, 6\}$

e) $(Q \cap R) \cup P = \{2, 3, 4, 5, 7\}$

8. A

9.

a) 330

b) 70

c) 100

d) 220

e) 20

10. A

11. B

12. B

13. A

14. D

15. A

16. C

17.

a) -0,9

b) Reta.



Lined writing area consisting of two columns of horizontal lines.



